

Τετραγωνικές Μορφές

Ορισμός:

Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$.

Μια ανεικόνιση $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, θα λέγεται τετραγωνική μορφή.

Αν υπάρχει ένας συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n$ και μια ορθή βάση $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, τ.ω. $Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ ①.

Παρατήρηση:

Η σχέση ① γράφεται ως εξής:

$$Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q(x) = x^t \cdot A \cdot x,$$

$$\text{Όπου } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ και } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Θεώρημα:

Έστω $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τετραγωνική μορφή ως προς ΟΚΒ $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Υπάρχει άλλη ΟΚΒ $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ ως προς την οποία, η Q λαμβάνει τη μορφή: $Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A της Q και x_1', x_n' είναι οι συντεταγμένες του σημείου $\vec{x}$ ως προς νέα βάση $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Απόδειξη:

Αφού ο πίνακας A της Q είναι συμμετρικός $\Rightarrow \exists$ ορθογ. πίνακας P , τ.ω. $P^t \cdot A \cdot P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = P \cdot \Lambda \cdot P^t \quad ②$$

$$\text{Αρα: } Q(x) = x^t \cdot A \cdot x \stackrel{②}{=} x^t \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^t \cdot x = (P^t \cdot x)^t \cdot \Lambda \cdot (P^t \cdot x) \stackrel{z = P^t \cdot x}{=} \\ \Rightarrow Q(x) = z^t \cdot \Lambda \cdot z \Rightarrow Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 (x_1)^2 + \dots + \lambda_n (x_n)^2.$$

Παρατήρηση:

Τα συστήματα συντεταγμένων $(x_1, \dots, x_n)$ και $(x'_1, \dots, x'_n)$, συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ορισμός:

Οι στύλες του P λέγονται κύρια άξονες της τετραγωνικής μορφής.

Π.χ Να εξετασθεί τι παριστάνει η καμπύλη: $x^2 - 4xy + y^2 + 7 = 0$. ①

Λύση:

Θεωρώ την τετραγωνική μορφή:

$$Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2.$$

Η καμπύλη ① είναι: $Q(x, y) = -7$.

Ας διαγ/φω την Q . Ο πίνακας της Q στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι:

$$Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Συντελεστής του x
 → Ο συντελεστής του xy είναι 4.
 Επειδή στην Q : Συντελεστής, βάσει το x και y και το y και x αλλ.
 → Συντελεστής του y .

Ιδιότητες: Είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \cdot (3-\lambda).$$

Αρα οι ιδιότητες είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$.

Ισοχώροι:

• Υπολογισμός του $V(-1)$:

Έχουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Αν οπω
ως προκ.
δύο το
0, είναι
κινδυν.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Μια βάση του $V(-1)$ είναι το διάνυσμα $\vec{v}_1 = (1, 1)$, οπότε το:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \text{ βάση του } V(-1) \text{ με μήκος } 1.$$

• Υπολογισμός του $V(3)$:

Έχω το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

Μια βάση του $V(3)$ είναι το διάνυσμα:

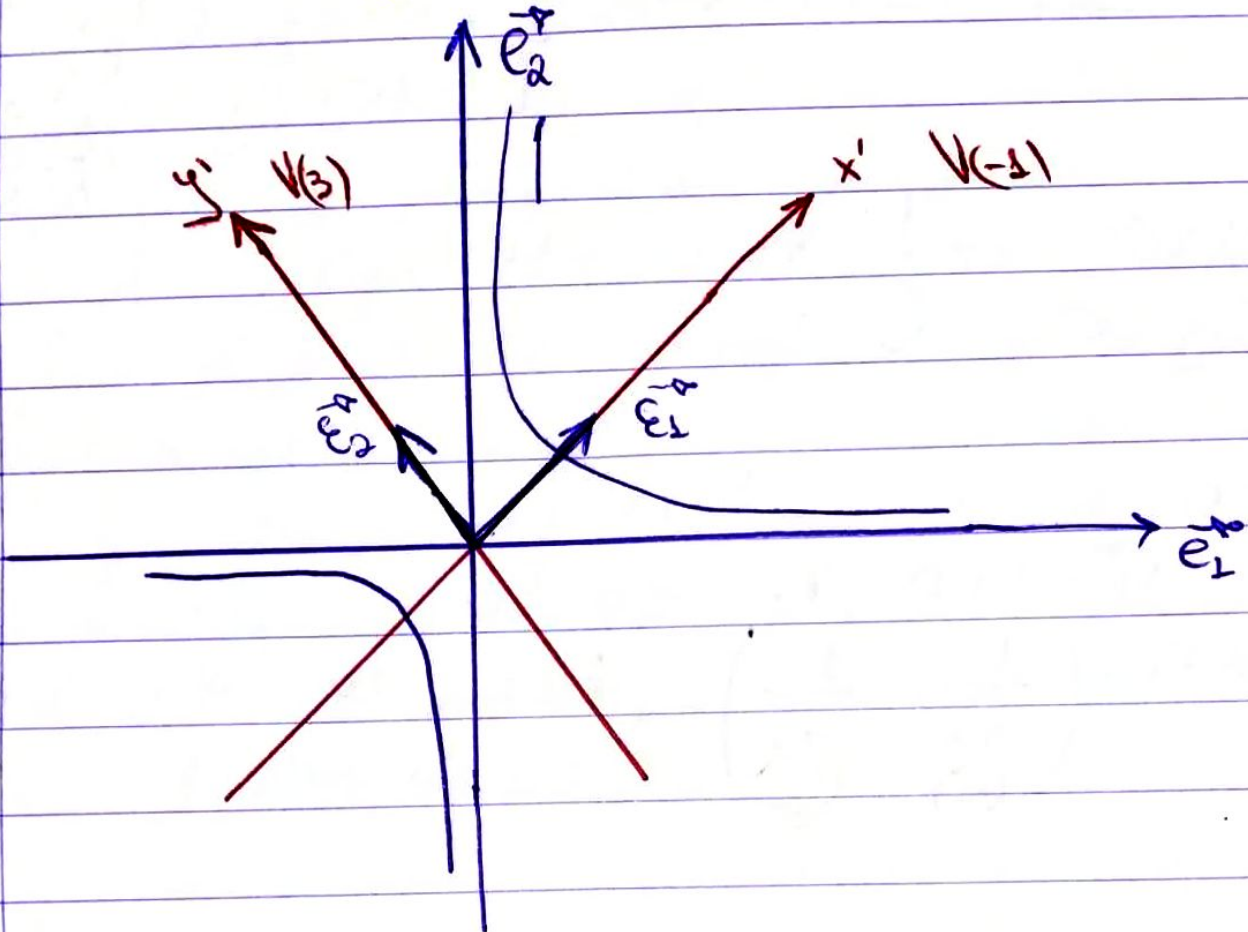
$$\vec{v}_2 = (-1, 1) \Rightarrow \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Ο πίνακας P είναι:
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Το νέο σύστημα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Έχουμε: $Q(x, y) = -x'^3 + 3y'^2$

Η καμπύλη που γράφεται είναι:
 $-x'^2 + 3y'^2 = -7$. (ή) $x'^2 - 3y'^2 = 7$.



Π.Χ.

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια ως εξίσωση:
 $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 1.$

Λύση:

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή:

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz.$$

Ο πίνακας της Q είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εύρεση ιδιοτιμών:

Θεωρούμε την ορίζουσα:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \text{ιδιοτιμές: } \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3.$$

Οι ιδιοχώροι είναι:

- $V(0) = \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $V(1) = \{t(0, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $V(3) = \{t(1, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

Τα διανύσματα: $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$

$$\vec{e}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \vec{e}_3 = \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

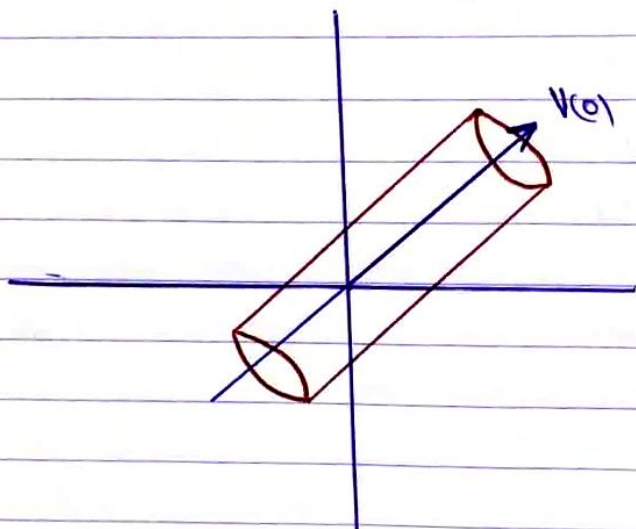
αποτελούν ΟΚΒ ιδιοδιανυσμάτων.

Συνένωση: $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$

Στο 606ηκη συν/ων: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

Έχουμε: $Q(x', y', z') = (y')^2 + 3(z')^2$.

Η αρχική εfigωση γράφεται ως εfigς: $(y')^2 + 3(z')^2 = 1$.



§ Καμπύλες και επιφάνειες 2ου βαθμού:

Μελετάμε εfigωσες της μορφής:
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + \gamma = 0$,
 όπου a_{ij}, b_{ij}, γ : πραγματικοί αριθμοί.

Η εfigωση αυτή, αναφέρεται στο 2 ή 3η.

① Το 1η:

$$Q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

που περιέχει 2ου βαθμού όρους.

Με αντικατάσταση τετραγώνου, φέρνουμε την εξίσωση σε αναγνωρίσιμη μορφή.

Παρατηρήσεις:

- ① Εάν $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, τότε οι ιδιοχώροι $V(\lambda_1), V(\lambda_2), V(\lambda_3)$ είναι κάθετοι μεταξύ τους. Σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύ απλό, ο υπολογισμός του πίνακα P .
- ② Εάν $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, τότε ίσως να χρειαστεί να κάνουμε Gram-Schmidt για την εύρεση της ορθής βάσης και του P .
- ③ Εάν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, τότε ο πίνακας ήταν ήδη διαγώνιος.

Παράδειγμα:

Τι παρίστανται η επιφάνεια με εξίσωση:
 $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2x - y + 3z = 0$.

Λύση:

Η τετραγωνική μορφή είναι ήδη διαγώνια, οπότε μένει μόνο να κάνουμε αντικατάσταση τετραγώνου.

$$0 = x^2 - 2x - 2y^2 - y + 3z^2 + 3z$$

~~$$0 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 2\left(y^2 + \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) + 1$$~~

$$0 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 2\left(y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 3$$

$$+ 3\left(z^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

② Το μέρος:

$\Pi(x, y, z) = b_1 x + b_2 y + b_3 z + \gamma$, που περιέχει
1^{ου} βαθμού όρους.

Είδαμε ότι η Q είναι τετραγωνική μορφή,
η οποία γράφεται σε μορφή πίνακων.

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Είδαμε ότι ο A : διαγωνιοποιείται.

Άρα υπάρχει ορθός πίνακας P , τ.ω.:

$$A = P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P$$

$$\text{2^{το} βήμα: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ λαμβάνει}$$

$$\text{την έκφραση: } Q(x', y', z') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2$$

Οι πρωτοβάθμιοι όροι ως προς το 3^ο
βήμα, θα είναι της μορφής:

$$\Pi(x', y', z') = b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + \gamma.$$

Συνεπώς, η αρχική μας εξίσωση στο
νέο βήμα, θα έχει την μορφή:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + \gamma = 0.$$

Αναλ. Γεωμ. 9/05/2019.

5

$$= (x-1)^2 - 2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Μονοκυβ. υπερβολοειδές.

Παράδειγμα ③:

Τι παριστάνει στον χώρο $\mathbb{R}^3$ η εξίσωση:
 $x^2 - 2xy + 2xz - x - y + 2z - 1 = 0$.

Λύση:

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή:

$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz$, με πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ευρεθόν ιδιοτιμές του A:

Είναι άξεις της εξίσωσης:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Παρόλ. των} \\ \text{2^{ης} στ.} \\ \hline \text{όσον} \\ \text{τελευταία.} \end{array} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda) \{ -(1-\lambda) - 2 \} \\ = (-\lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι:
$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

Ευρεση διευθετών:

Υπολογισμός $V(1)$:

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 0y + 0z = 0 \\ x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Άρα: $V(1) = \{(0, t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Μια βάση είναι: $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, και:

$$\vec{e}_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1).$$

Υπολογισμός $V(-1)$:

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + y + 0z = 0 \\ x + 0y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Άρα: $V(-1) = \{(-t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$, και

$$\vec{e}_1^* = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1).$$

Υπολογισμός $V(2)$:

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -x - 2y + 0z = 0 \\ x + 0y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Οπότε: } \vec{e}_3^* = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1).$$

~~Αρα~~
 Αρα: $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

Ο νέος συντεταγμένος είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} x' + 0 y' + 2/\sqrt{6} z' \\ 1/\sqrt{3} x' + 1/\sqrt{2} y' - 1/\sqrt{6} z' \\ 1/\sqrt{3} x' + 1/\sqrt{2} y' + 1/\sqrt{6} z' \end{pmatrix}$$

Μετά από υπολογισμούς, η αρχική εξίσωση λαμβάνει την μορφή:

$$0 = -x'^2 + 2 \left[z' + \frac{1}{4\sqrt{6}} \right]^2 - \frac{1}{48} - \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

Θέτοντας: $\begin{cases} x' = X \\ y' = Y + \sqrt{2} \cdot \frac{19}{48} \\ z' = z - \frac{1}{4\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow -X^2 + 2z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Y$

Παραβολοειδής

Πρόβλημα 9

Λύση 9

Στο επίπεδο Oxy δίνεται η εξίσωση:

$$\underbrace{x^2 - 4xy + y^2}_\alpha + \underbrace{10x - 8y + 7}_\pi = 0$$

α) Να δοθεί η καμπύλη παραβολή.

β) Να μετατραπεί σε κανονική θέση ①
 γ) Να δοθεί.

Λύση:

Θεωρούμε την ετερογενή μορφή:

$$Q(x,y) = x^2 - 4xy + y^2.$$

Ο πίνακας είναι: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Εύρεση ιδιοτιμών:

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4.$$

Άρα: $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$.

Υπολογισμός του $V(-1)$:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Άρα: $V(-1) = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1)$.

Τότε: $V(3) = \{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1,1)$.

Άρα: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Θεωρούμε τις ορθογώνιες X, Y με:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2} \cdot (X - Y) \\ y = 1/\sqrt{2} \cdot (X + Y) \end{cases}.$$

(7)

- 26. in obigen Flächen transformierter Kurve:

$$0 = -x^2 + 3y^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{8}{\sqrt{2}}(x+y) + 7.$$

$$= -x^2 + 3y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{18}{\sqrt{2}}y + 7.$$

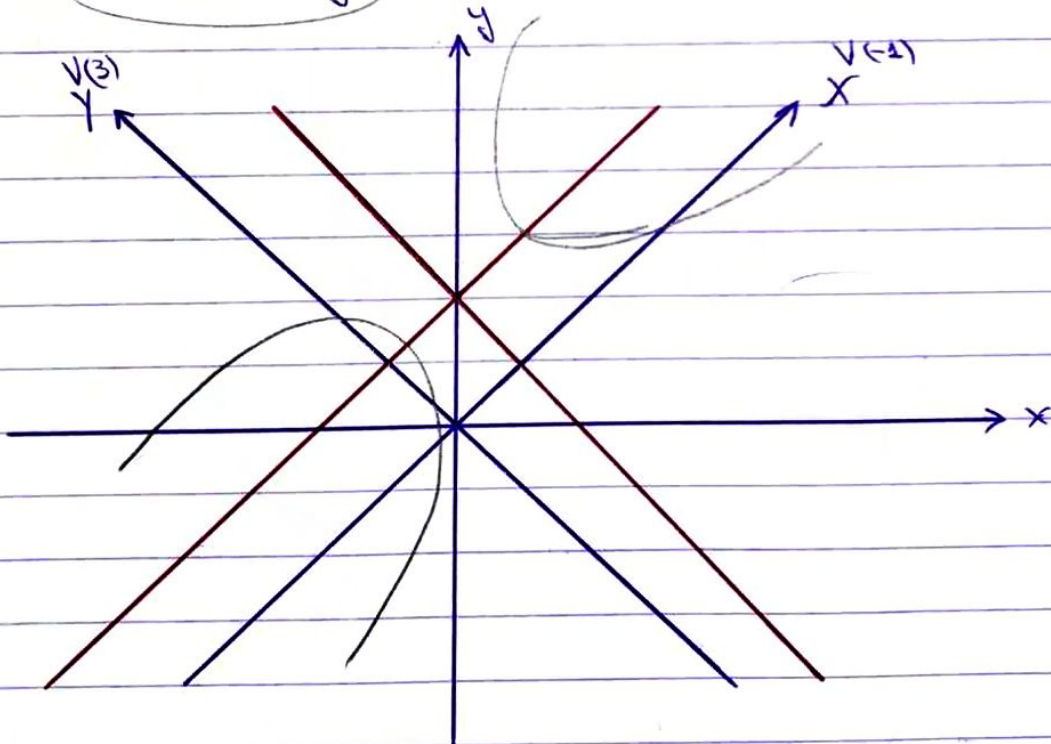
$$0 = -(x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x) + 3(y^2 - \frac{6}{\sqrt{2}}y) + 7.$$

$$\Rightarrow -(x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 3(y - \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 6.$$

 $\tilde{x} \neq x \neq x$

$$\tilde{x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{y} = y - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow -\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 6$$



~~~~~